

תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי חטיבת הביניים

4 בספטמבר 2026

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. נמקו בפירוט את תשובותיכם וכיתבו באופן ברור, קריא ומסודר.
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק במקום המיועד לכך על טופס הבחינה. אין להגיש מחברות טיוטה. כיתבו בעט ובעברית.
3. אין להשתמש במחשבוניס, ספרים, דפי נוסחאות, או בכל חומר עזר אחר.
4. מלאו את פרטיכם האישיים בתחתית עמוד זה.

בהצלחה!

שם מלא: _____

מספר תעודת זהות: _____

שם בית הספר: _____

כיתה: _____

מספר טלפון נייד: _____

כתובת דואר אלקטרוני (באותיות דפוס ברורות!): _____

שאלה 1

החליפו את האותיות בספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 בסדר כלשהו, כך שיתקבל מספר 5-ספרתי:

$$(AB + CD) \times (EF - GH)$$

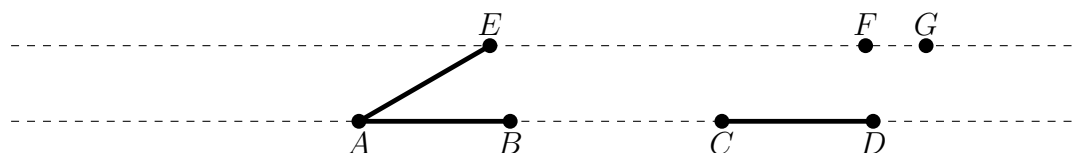
שאלה 2

הראו שלכל $1 \leq n$ קיים פתרון למשוואה הבאה כאשר x, y, z מספרים שלמים חיוביים:

$$x^2 + y^2 = z^n$$

שאלה 3

שוקי צייר 35 נקודות על דף נייר גדול. ידוע רק שכל הנקודות נמצאות על שני ישרים מקבילים זה לזה. לאחר מכן הוא חיבר בקטע ישר כל זוג נקודות שהן במרחק של סנטימטר אחד בדיוק זו מזו. כמה קטעים כאלה יכולים להיות לכל היותר? תנו דוגמה והוכיחו שהיא מקסימלית.



שאלה 4

שולה לקחה דף משבצות גדול, עם יותר מ-10 שורות ויותר מ-10 עמודות, וכתבה מספר בכל אחת מהמשבצות שבדף. היא שמה לב שאם בוחרים 10 שורות כלשהן ו-10 עמודות כלשהן, ומחשבים את סכום המספרים ב-100 המשבצות ששייכות גם ל-10 השורות וגם ל-10 העמודות, אז התוצאה היא תמיד 1000. מהם המספרים שכתבה שולה?

שאלה 5

עליזה ובוועז משחקים במשחק הבא. מול כל אחד מהם מונחים בשורה שמונה קלפים המסומנים J, J, Q, Q, K, K, A, A , בסדר אקראי, והפוכים. כל שחקן יכול להציץ בשלושה מבין שמונת הקלפים שמולו. אחר כך, הם מחליפים מקומות, וכל שחקן בוחר ארבעה קלפים מהשורה האחרת והופך אותם, בלי להסתכל על הקלפים הנבחרים, ובלי לדבר זה עם זה.

המטרה המשותפת שלהם היא שיהיה סימן אחד לפחות, מבין ארבעת הסימנים J, Q, K, A , שמופיע בשתי הרביעיות שנהפכו. האם הם יכולים לתאם מראש דרך פעולה שתבטיח ניצחון בכל מקרה? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה 6

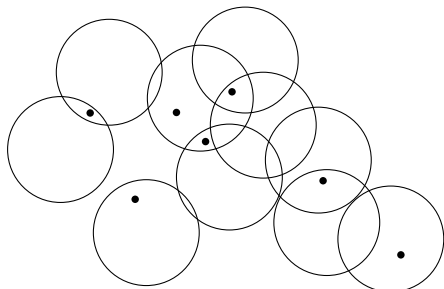
בכיתה של שימי יש 30 תלמידים, וחלקם שלחו הודעות זה לזה. ידוע שמבין כל חמישה תלמידים בכיתה יש לפחות שניים כך שאחד מהם שלח הודעה לשני. הוכיחו שיש בכיתה תלמיד ששלח הודעה לפחות לארבעה תלמידים אחרים.

שאלה 7

שושי ציירה מספר כלשהו של עיגולים באותו גודל על דף נייר גדול. ראו ציור לדוגמה.

1. האם בהכרח אפשר להוסיף לציור נקודות כך שכל עיגול יכיל בתוכו מספר אי-זוגי של נקודות?

2. האם בהכרח אפשר לעשות זאת כך שכל עיגול יכיל נקודה אחת בדיוק?



פתרונות

פתרון שאלה 1

פתרון אחד הוא

$$(63 + 74) \cdot (85 - 12).$$

ואכן,

$$63 + 74 = 137, \quad 85 - 12 = 73,$$

ולכן

$$(63 + 74)(85 - 12) = 137 \cdot 73 = 10001.$$

זהו מספר בן חמש ספרות, וכל אחת מן הספרות 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 הופיעה בדיוק פעם אחת.

פתרון שאלה 2

נשתמש בשלשה הפיתגורית המוכרת

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

לכל $n \geq 1$, נגדיר

$$x = 3 \cdot 5^{n-1}, \quad y = 4 \cdot 5^{n-1}, \quad z = 25.$$

אז x, y, z הם מספרים שלמים חיוביים, ומתקיים

$$x^2 + y^2 = (3 \cdot 5^{n-1})^2 + (4 \cdot 5^{n-1})^2.$$

לכן

$$x^2 + y^2 = (3^2 + 4^2) \cdot 5^{2n-2} = 25 \cdot 5^{2n-2} = 5^{2n} = 25^n = z^n.$$

כלומר לכל $n \geq 1$ מצאנו פתרון במספרים שלמים חיוביים.

פתרון שאלה 3

נראה שהמספר המקסימלי הוא

$$\boxed{67}$$

נסמן ב- a את מספר הנקודות שעל הישר הראשון, וב- b את מספר הנקודות שעל הישר השני. לכן

$$a + b = 35.$$

אם כל הנקודות מונחות על אותו ישר, אז יש 35 נקודות על ישר אחד. במקרה כזה מספר זוגות הנקודות שמרחקם בדיוק 1 הוא לכל היותר 34: כאשר מחברים נקודות במרחק 1 על ישר אחד מתקבלות שרשראות, ובשרשרת עם r נקודות יש לכל היותר $r - 1$ קטעים. לכן במקרה זה לא מתקבל יותר מן הדוגמה שנציג בהמשך.

מעתה נניח שעל כל אחד משני הישרים יש לפחות נקודה אחת, כלומר

$$a, b \geq 1.$$

נחלק את הקטעים לשני סוגים: קטעים שמחברים שתי נקודות על אותו ישר, וקטעים שמחברים נקודה על הישר הראשון עם נקודה על הישר השני.

ראשית, על ישר אחד שבו יש m נקודות, מספר זוגות הנקודות שמרחקם בדיוק 1 הוא לכל היותר $m - 1$. אכן, אם מחברים על הישר את כל זוגות הנקודות שמרחקם 1, מתקבלות שרשראות של נקודות במרחקים של 1, ובשרשרת עם r נקודות יש לכל היותר $r - 1$ קטעים. לכן בסך הכול, על שני הישרים יחד, מספר הקטעים שמונחים על אחד הישרים הוא לכל היותר

$$(a - 1) + (b - 1) = 33.$$

כעת נסתכל על הקטעים שמחברים בין שני הישרים. נסמן ב- h את המרחק בין הישרים.

אם $h > 1$, אין קטעים כאלה בכלל.

אם $h = 1$, אז שתי נקודות על שני הישרים נמצאות במרחק 1 זו מזו רק אם הן נמצאות בדיוק אחת מעל השנייה. לכן כל נקודה יכולה להשתתף בקטע כזה לכל היותר פעם אחת, ומספר הקטעים בין הישרים הוא לכל היותר

$$\min(a, b) \leq 17.$$

במקרה זה מספר הקטעים הכולל הוא לכל היותר

$$33 + 17 = 50 < 67.$$

נותר לדון במקרה $h < 1$. במקרה זה קיים מספר חיובי s כך ששתי נקודות על שני הישרים נמצאות במרחק 1 זו מזו אם ורק אם ההפרש האופקי ביניהן הוא s או $-s$. כלומר, כל נקודה על ישר אחד יכולה להתחבר רק לשתי נקודות אפשריות על הישר השני: אחת "מינה" ואחת "שמאלה". הגרף שמתקבל הוא איחוד של מסילות (שכנעו עצמכם שלא יתכן מעגל)

בגרף בלי מעגלים שיש בו לכל היותר 35 קודקודים, מספר הקשתות הוא לכל היותר 34. לכן מספר הקטעים שמחברים בין שני הישרים הוא לכל היותר 34.

מכאן שבמקרה $h < 1$, מספר הקטעים הכולל הוא לכל היותר

$$33 + 34 = 67.$$

כעת נראה שאפשר באמת להגיע ל-67.

נבחר שני ישרים מקבילים שהמרחק ביניהם הוא

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

נשים 18 נקודות על הישר הראשון, במרחקים של 1 זו מזו:

$$0, 1, 2, \dots, 17.$$

על הישר השני נשים 17 נקודות, כך שהן נמצאות מעל האמצעים בין נקודות סמוכות על הישר הראשון:

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots, \frac{33}{2}.$$

על הישר הראשון יש 17 קטעים באורך 1. על הישר השני יש 16 קטעים באורך 1. בנוסף, כל נקודה על הישר השני נמצאת במרחק 1 משתי נקודות סמוכות על הישר הראשון, כי

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

לכן יש עוד

$$2 \cdot 17 = 34$$

קטעים בין שני הישרים.

בסך הכול קיבלנו

$$17 + 16 + 34 = 67$$

קטעים.

לכן המספר המקסימלי האפשרי הוא

67

פתרון שאלה 4

נראה שכל המספרים ששולה כתבה הם 10.

נבחר שתי שורות כלשהן, ונקרא להן r ו- r' . נבחר גם 10 עמודות כלשהן. כעת נבחר עוד 9 שורות כלשהן, שונות מ- r, r' . לפי הנתון, אם לוקחים את 10 השורות הכוללות את r ואת 9 השורות הנוספות, ואת אותן 10 עמודות, סכום 100 המספרים הוא 1000. אם מחליפים את השורה r בשורה r' , הסכום עדיין 1000. לכן ההפרש בין סכומי המספרים בשורות r ו- r' , על פני אותן 10 עמודות, הוא 0.

כלומר: לכל בחירה של 10 עמודות, סכום ההפרשים בין השורה r לשורה r' בעמודות אלה הוא 0. מכאן נובע שכל ההפרשים בין שתי השורות r, r' שווים זה לזה. אכן, נבחר שתי עמודות c, c' . נבחר עוד 9 עמודות אחרות. סכום ההפרשים על פני 10 העמודות הכוללות את c הוא 0, וגם סכום ההפרשים על פני 10 העמודות הכוללות את c' במקום c הוא 0. כאשר מחסרים את שתי המשוואות, כל 9 העמודות המשותפות מתבטלות, ומקבלים שההפרש בעמודה c שווה להפרש בעמודה c' .

לכן ההפרש בין שתי השורות r, r' הוא מספר קבוע בכל העמודות. אבל סכום ההפרשים בכל 10 עמודות הוא 0, ולכן 10 פעמים אותו קבוע שווה 0. לכן הקבוע הוא 0. כלומר שתי השורות r, r' זהות.

מאחר שהשורות r, r' היו שרירותיות, כל השורות בלוח זהות זו לזו.

באותו אופן, על ידי החלפת עמודות במקום החלפת שורות, מקבלים שכל העמודות זהות זו לזו. לכן כל המספרים בלוח שווים לאותו מספר קבוע, נאמר t .

כעת, בכל בחירה של 10 שורות ו-10 עמודות יש 100 משבצות, ובכל אחת מהן כתוב t . לפי הנתון סכומן הוא 1000, ולכן

$$100t = 1000.$$

מכאן

$$t = 10.$$

לכן בכל משבצת כתבה שולה את המספר

10

פתרון שאלה 5

הנה אסטרטגיה אפשרית: כל שחקן מסתכל בשלושת הקלפים השמאליים. אם אחד מהם הוא A אז הוא הופך את ארבעת השמאליים בשורה השנייה ואחרת את ארבעת הימניים. כעת, אם שני השחקנים בחרו ימין או שניהם בחרו שמאל אז יש A משותף, ואחרת, לכל אחד יש שלושה קלפים שאינם A , ולכן יש לו שניים מבין J, Q, K ולכן אחד מהם משותף.

פתרון שאלה 6

נניח בשלילה שאין תלמיד ששלח הודעה לפחות לארבעה תלמידים אחרים. כלומר, כל תלמיד שלח הודעות לכל היותר לשלושה תלמידים אחרים.

נבנה גרף מכוון: כל תלמיד הוא קודקוד, ואם תלמיד A שלח הודעה לתלמיד B , נצייר חץ מ- A אל B .

לכל קודקוד יש דרגת יציאה לכל היותר 3. נשתמש בעובדה הפשוטה הבאה: בכל גרף מכוון יש קודקוד שדרגת הכניסה שלו קטנה או שווה לדרגת היציאה שלו. אכן, סכום כל דרגות הכניסה שווה לסכום כל דרגות היציאה, כי שניהם שווים למספר החצים בגרף. לכן לא ייתכן שדרגת הכניסה של כל קודקוד גדולה ממש מדרגת היציאה שלו.

נבחר קודקוד שדרגת הכניסה שלו קטנה או שווה לדרגת היציאה שלו. מאחר שדרגת היציאה שלו לכל היותר 3, גם דרגת הכניסה שלו לכל היותר 3. לכן בסך הכול יש לו לכל היותר 6 שכנים: לכל היותר 3 תלמידים שהוא שלח להם הודעה, ולכל היותר 3 תלמידים ששלחו לו הודעה.

נבחר את התלמיד הזה, ואז נסיר מן הגרף אותו ואת כל שכניו, כלומר את כל התלמידים ששלחו לו הודעה או שקיבלו ממנו הודעה. כך הסרנו לכל היותר

$$1 + 6 = 7$$

תלמידים.

נחזור על הפעולה הזאת ארבע פעמים. הדבר אפשרי, כי אחרי ארבע פעמים הסרנו לכל היותר

$$4 \cdot 7 = 28$$

תלמידים, ולכן לפני כל אחת מארבע הבחירות עדיין נשאר לפחות תלמיד אחד בגרף. קיבלנו כך ארבעה תלמידים נבחרים. כל שניים מהם אינם מחוברים בחץ בשום כיוון: כאשר בחרנו תלמיד, מחקנו מיד את כל מי ששלח לו הודעה ואת כל מי שהוא שלח לו הודעה, ולכן אף תלמיד שנבחר מאוחר יותר אינו יכול להיות שכן שלו. אחרי ארבע הבחירות עדיין נשארים לפחות

$$30 - 28 = 2$$

תלמידים שלא נמחקו. נבחר אחד מהם כתלמיד חמישי. גם הוא אינו מחובר בחץ לאף אחד מארבעת התלמידים שנבחרו קודם, כי הוא לא נמחק כאשר הם נבחרו.

לכן מצאנו חמישה תלמידים כך שאף אחד מהם לא שלח הודעה לאף אחד מן האחרים. אבל זה סותר את הנתון שבכל חמישה תלמידים יש לפחות שניים שאחד מהם שלח הודעה לשני.

הסתירה מראה שההנחה שלנו שגויה. לכן יש בכיתה תלמיד ששלח הודעה לפחות לארבעה תלמידים אחרים.

פתרון שאלה 7

נניח שכל העיגולים הם דיסקות מלאות, כלומר כל עיגול כולל גם את השטח שבתוכו וגם את השפה שלו.

סעיף 1

נוכיח שאפשר להוסיף נקודות כך שכל עיגול יכיל מספר אי-זוגי של נקודות. נשתמש באינדוקציה על מספר העיגולים. אם יש רק עיגול אחד, פשוט שמים נקודה אחת בתוכו. כעת נניח שהטענה נכונה לכל ציור עם פחות מ- m עיגולים, ונוכיח אותה עבור ציור עם m עיגולים. ראשית, אם יש כמה עיגולים זהים בדיוק, אפשר להתייחס אליהם כאל עיגול אחד: כל נקודה שנמצאת באחד מהם נמצאת גם בכולם, ולכן תמיד יהיה להם אותו מספר נקודות. לכן נניח שאין שני עיגולים זהים.

נבחר עיגול שמרכזו הוא השמאלי ביותר מבין כל המרכזים. אם יש כמה מרכזים עם אותה קואורדינטה שמאלית, נבחר אחד מהם כך שמרכזו הוא הנמוך ביותר מביניהם. נסמן את העיגול הזה ב- C . לעיגול C יש נקודה פרטית, כלומר נקודה שנמצאת ב- C ולא נמצאת בשום עיגול אחר. למשל, אפשר לקחת נקודה על השפה של C , קרובה מאוד לנקודה השמאלית ביותר של C , ובמידת הצורך מתחתיה. בגלל שכל העיגולים שווי-רדיוס, עיגול אחר שאינו זהה ל- C אינו יכול להכיל את כל הסביבה הקטנה הזאת: כדי להגיע עד הנקודה השמאלית ביותר של C , מרכזו היה צריך להיות שמאלה יותר, או בדיוק באותו מקום. לכן אכן קיימת נקודה פרטית של C .

כעת נסיר זמנית את העיגול C . לפי הנחת האינדוקציה, אפשר להוסיף נקודות כך שכל שאר העיגולים יכילו מספר אי-זוגי של נקודות.

נחזיר את C . אם מספר הנקודות שכבר נמצאות בתוך C הוא אי-זוגי, סיימנו. אם מספר הנקודות שבתוך C הוא זוגי, נוסיף נקודה פרטית של C . נקודה זו נמצאת בתוך C , אבל אינה נמצאת בתוך אף עיגול אחר. לכן היא משנה את הזוגיות רק של C , ולא משנה את הזוגיות של אף עיגול אחר. כך גם C מכיל מספר אי-זוגי של נקודות, וגם כל שאר העיגולים מכילים מספר אי-זוגי של נקודות. זה משלים את האינדוקציה.

לכן התשובה לסעיף 1 היא: כן, תמיד אפשר.

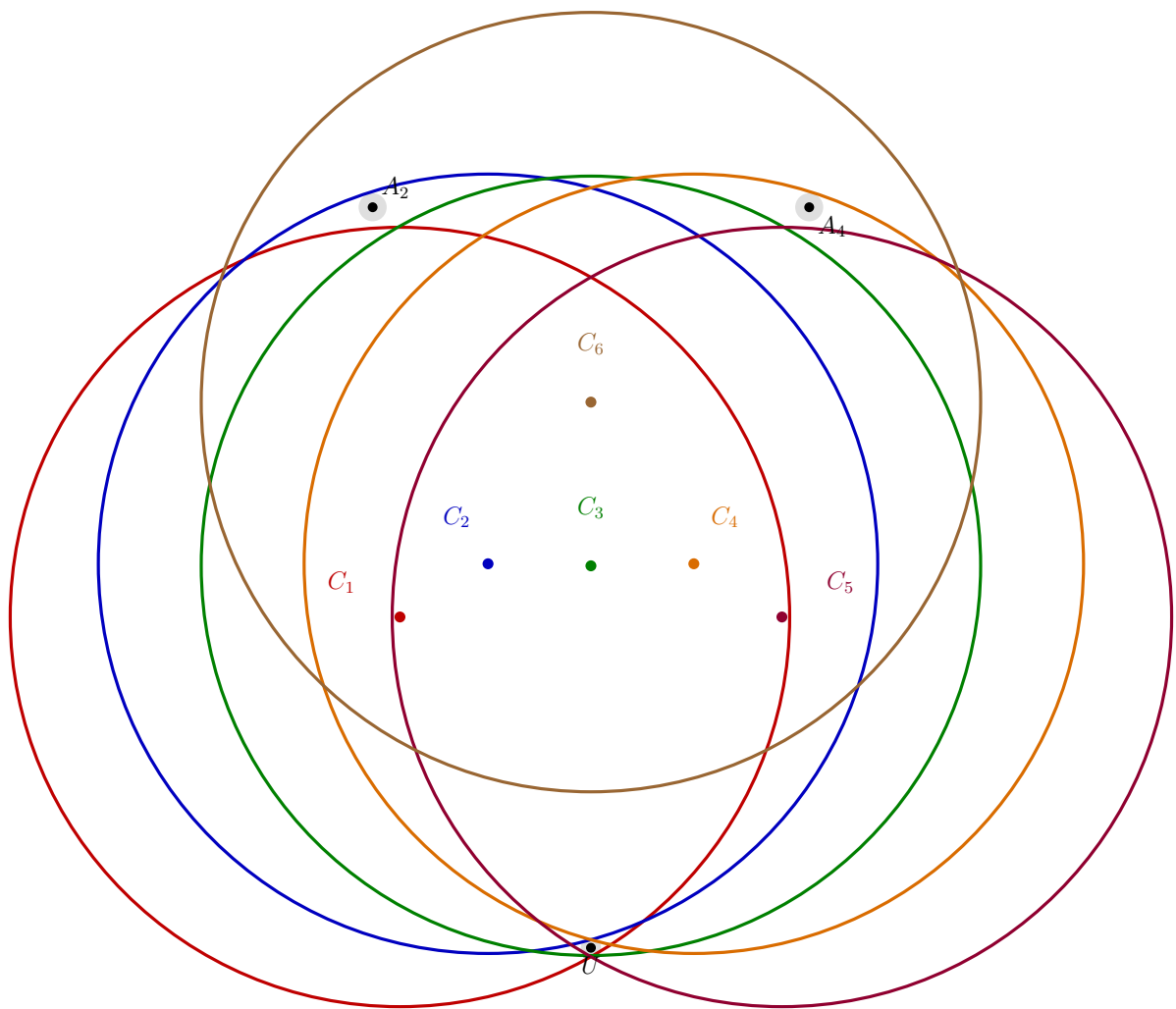
סעיף 2

התשובה היא לא. נראה שיש ציור של עיגולים שווי-רדיוס שבו אי אפשר להוסיף נקודות כך שכל עיגול יכיל בדיוק נקודה אחת.

נשתמש תחילה בציור מקומי של שישה עיגולים, כמו בציור הבא. חמשת העיגולים הראשונים הם

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5,$$

והעיגול השישי הוא C_6 . בציור, כל עיגול ומרכזו מסומנים באותו צבע.



בציור יש אזור קטן U , המסומן ליד הנקודה התחתונה, שכל נקודה בו נמצאת בתוך העיגולים

$$C_1, C_3, C_5$$

ואינה נמצאת בתוך העיגולים

$$C_2, C_4.$$

כלומר, אם $p \in U$ אז

$$p \in C_1, \quad p \notin C_2, \quad p \in C_3, \quad p \notin C_4, \quad p \in C_5.$$

כמו כן, בציור יש שני אזורים קטנים נוספים, המסומנים A_2 ו- A_4 . האזור A_2 נמצא בתוך C_2 , אבל מחוץ ל- C_1, C_3, C_5 . באופן דומה, האזור A_4 נמצא בתוך C_4 , אבל מחוץ ל- C_1, C_3, C_5 . העיגול השישי C_6 מכיל את שני האזורים A_2, A_4 .

נראה שאם אחת הנקודות שנבחרו נמצאת בתוך U , אז אי אפשר להשלים את הבחירה כך שכל ששת העיגולים

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$$

יכילו בדיוק נקודה אחת.

אכן, נניח שנבחרה נקודה

$$p \in U.$$

מכיוון p -ש-נמצאת בתוך C_1, C_3, C_5 , שלושת העיגולים האלה כבר מכילים נקודה. לכן אסור לבחור אף נקודה נוספת בתוך אף אחד מן העיגולים

$$C_1, C_3, C_5,$$

אחרת אחד מהם יכיל לפחות שתי נקודות.

מצד שני, הנקודה p אינה נמצאת בתוך C_2 ואינה נמצאת בתוך C_4 . לכן עדיין חייבים לבחור נקודה שתהיה בתוך C_2 , ונקודה שתהיה בתוך C_4 .

הנקודה שנבחר עבור C_2 אינה יכולה להיות בתוך C_1, C_3, C_5 , ולכן היא מוכרחה להימצא באזור מן הסוג של A_2 . באופן דומה, הנקודה שנבחר עבור C_4 מוכרחה להימצא באזור מן הסוג של A_4 . בצירוי שני האזורים האלה זרים זה לזה, ולכן אלו חייבות להיות שתי נקודות שונות.

אבל שני האזורים A_2, A_4 נמצאים בתוך C_6 . לכן שתי הנקודות האלה נמצאות שתיהן בתוך C_6 . מכאן ש- C_6 מכיל לפחות שתי נקודות, בסתירה לדרישה שכל עיגול יכיל בדיוק נקודה אחת.

קיבלנו אפוא את המסקנה הבאה: בצירוי המקומי של ששת העיגולים, אם אחת הנקודות הנבחרות נמצאת באזור U , אז אי אפשר שכל ששת העיגולים יכילו בדיוק נקודה אחת.

כעת נהפוך את הטיעון המקומי לדוגמה שבה כל בחירה נכשלת.

נוסיף עיגול נוסף D , באותו רדיוס כמו כל שאר העיגולים. נעתיק את הצירוי המקומי של ששת העיגולים פעמים רבות, בהזזות שונות בלבד, כך שהעתיקים של האזור הקטן U יכסו את כל העיגול D . אפשר לעשות זאת במספר סופי של הזזות, כי D חסום.

כעת נניח בשלילה שאפשר לבחור נקודות כך שכל עיגול בצירוי כולו יכיל בדיוק נקודה אחת. בפרט, העיגול D מכיל בדיוק נקודה אחת. נסמן נקודה זו ב- p .

העתיקים של U מכסים את כל D , ולכן p נמצאת בתוך אחד מן העתיקים של U . נסתכל על העותק המתאים של צירוי ששת העיגולים. לפי מה שהוכחנו, ברגע שיש נקודה נבחרת בתוך אותו אזור U , אי אפשר שכל ששת העיגולים של אותו עותק יכילו בדיוק נקודה אחת. זו סתירה.

לכן קיים צירוי של עיגולים שווי-רדיוס שבו אי אפשר להוסיף נקודות כך שכל עיגול יכיל בדיוק נקודה אחת.

מכאן שהתשובה לסעיף 2 היא: לא, לא תמיד אפשר.

פתרון שאלה 7

על הלוח כתובים בתחילה המספרים

$$1, 2, \dots, 2026.$$

בכל צעד בוחרים שני מספרים a, b , מוחקים אותם, וכותבים במקומם את

$$a + b + ab.$$

נראה שהמספר הסופי אינו תלוי בסדר הפעולות.

הרעיון הוא להסתכל לא על המספרים עצמם, אלא על המספרים שמתקבלים אחרי שמוסיפים 1. אם מחליפים את a, b במספר

$$c = a + b + ab,$$

אז

$$c + 1 = a + b + ab + 1 = (a + 1)(b + 1).$$

כלומר, כאשר מסתכלים על כל מספר שעל הלוח ועוד 1, הפעולה היא פשוט כפל של שני מספרים.

בתחילת התהליך המספרים שעל הלוח הם

$$1, 2, \dots, 2026,$$

ולכן המספרים "יועד 1" הם

$$2, 3, \dots, 2027.$$

בכל צעד, שניים מן המספרים האלה מוחלפים במכפלה שלהם. לכן אחרי כל הצעדים, המספר היחיד שיישאר אחרי הוספת 1 יהיה

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2027.$$

לכן המספר הסופי שעל הלוח עצמו הוא

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2027 - 1.$$

בפרט, המספר הסופי אינו תלוי בסדר שבו בוצעו הפעולות.

אפשר לכתוב זאת גם בצורה

$$2027! - 1$$