

תחרות גרוסמן

שאלון לתלמידי תיכון

4 בספטמבר 2026

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 7 שאלות. יש לפתור את כל השאלות. נמקו בפירוט את תשובותיכם וכיתבו באופן ברור, קריא ומסודר.
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק במקום המיועד לכך על טופס הבחינה. אין להגיש מחברות טיוטה. כיתבו בעט ובעברית.
3. אין להשתמש במחשבוניס, ספרים, דפי נוסחאות, או בכל חומר עזר אחר.
4. מלאו את פרטיכם האישיים בתחתית עמוד זה.

בהצלחה!

שם מלא: _____

מספר תעודת זהות: _____

שם בית הספר: _____

כיתה (אם כבר סיימת בית ספר יש לכתוב באיזו שנה): _____

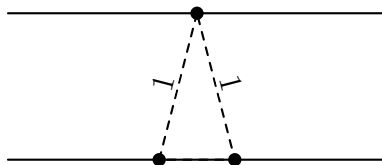
מספר טלפון נייד: _____

כתובת דואר אלקטרוני (אותיות דפוס ברורות!): _____

שאלה 1

יהי $n \geq 2$. בקבוצה של n נקודות במישור המוכלת באיחוד של שני ישרים מקבילים, מה המספר המקסימלי של זוגות של נקודות במרחק 1?

דוגמא: בציור הבא נתונות $n = 3$ נקודות עם 2 זוגות במרחק 1. לכן המספר המקסימלי הוא לפחות 2.



שאלה 2

מחרוזת בינארית באורך n היא סדרה של n ספרות, שכל אחת מהן יכולה להיות 0 או 1. המרחק בין שתי מחרוזות בינאריות באותו אורך מוגדר כמספר המקומות שמופיעות בהם ספרות שונות. לדוגמה, 11001, 01011 הן שתי מחרוזות בינאריות באורך 5, והמרחק ביניהן הוא 2, כי הן שונות בספרה שבמקום הראשון ובספרה שבמקום הרביעי.

הוכיחו שבכל קבוצה שיש בה יותר מ- $\frac{2^{n+1}}{n}$ מחרוזות בינאריות שונות באורך n , יש שלוש מחרוזות שונות שהמרחק בין כל שתיים מהן שווה.

שאלה 3

באי קטן חיים n תושבים. כל תושב אוהב חלק מן התושבים, ואנו מניחים שכל תושב אוהב גם את עצמו. אבל האהבה איננה בהכרח סימטרית, כלומר יתכן שתושב א' אוהב את תושב ב' ואילו תושב ב' לא אוהב את תושב א'.

ידוע שמבין כל k תושבים אפשר למצוא שניים מהם כך שאחד מהם אוהב את השני.

הוכיחו שיש תושב שאוהב לפחות $\frac{n}{2k}$ תושבים באי.

שאלה 4

יש n חטיפים, להם נקרא $1, 2, \dots, n$. לדניאל יש דירוג של n החטיפים, והוא סיפר לכם שהדירוג הוא אחד מבין m דירוגים נתונים.

אתם רוצים לקבל כמה שיותר מידע על הדירוג של דניאל בעזרת שימוש בשאלה אחת.

בשאלה הזו אתם מציגים לדניאל דירוג כלשהו, לאו דווקא מהדירוגים הנתונים. אם זה בדיוק הדירוג של דניאל, הוא יאמר לכם זאת. אחרת, דניאל יחלוק איתכם זוג i, j שדירגתם לא נכון, כלומר שדירגתם את j מעל i למרות שדניאל דירג את i מעל j .

הראו שאתם תמיד יכולים להציע דירוג באופן כזה שמהמידע של דניאל תוכלו לפסול לפחות $m/(2n)$ מהדירוגים.

שאלה 5

הראו שבהינתן $2n + 1$ מספרים אי-רציונליים, בהכרח יש $n + 1$ מתוכם, עם התכונה הבאה: אם סוכמים את $n + 1$ המספרים, וכן אם סוכמים רק חלק מהם, תמיד יתקבל מספר אי-רציונלי.

שאלה 6

אליס ובוב משתתפים במשחק חשיבה זוגי. לפני תחילת המשחק מותר להם להסכים על אסטרטגיה משותפת, אבל מרגע שהמשחק מתחיל אסור להם לתקשר בשום דרך.

רשימה בינארית היא רשימה שכל איבר בה הוא 0 או 1. המנחה של המשחק בוחר רשימה בינארית באורך 5 שהוא מראה רק לאליס ורשימה בינארית נוספת באותו אורך שהוא מראה רק לבוב.

אליס צריכה לבחור מקום ברשימה של בוב, אותה אינה רואה, ובוב צריך לבחור מקום ברשימה של אליס, אותה אינו רואה.

הם מנצחים אם הערכים בשני המקומות שבחרו שווים: כלומר, אם בשניהם מופיע 0, או אם בשניהם מופיע 1.

מצאו אסטרטגיה עבורה אליס ובוב ינצחו עבור יותר ממחצית האפשרויות, כלומר עבור יותר ממחצית מספר זוגות הרשימות הבינאריות באורך 5.

שאלה 7

בבעיה זו תמורה היא סידור של המספרים $1, \dots, n$, עבור n כלשהו. אם π היא תמורה, נסמן ב- $|\pi|$ את האורך שלה. נאמר שתמורה π היא תחילית של תמורה σ , אם אפשר לקבל את π מן האיברים הראשונים של σ , לאחר שינוי שמות לפי הגודל (בפרט $|\pi| \leq |\sigma|$). כלומר, אם $|\pi| = k$, מסתכלים על k האיברים הראשונים של σ . לאחר מכן משנים את שמותיהם כך שהקטן ביותר נקרא 1, הבא אחריו נקרא 2, וכן הלאה. אם מתקבלת π , נאמר ש- π היא תחילית של σ .

לדוגמה, בתמורה

$$4, 1, 5, 2, 3$$

שלושת האיברים הראשונים הם

$$4, 1, 5.$$

כאשר משנים שמות לפי הגודל,

$$1 \mapsto 1, \quad 4 \mapsto 2, \quad 5 \mapsto 3,$$

מתקבלת התמורה

$$2, 1, 3.$$

לכן $2, 1, 3$ היא תחילית של $4, 1, 5, 2, 3$.

אוסף סופי $\mathcal{A}$ של תמורות ייקרא חסר תחיליות אם אין בו שתי תמורות שונות כך שאחת היא תחילית של השנייה.

הוכיחו כי לכל אוסף סופי חסר תחיליות $\mathcal{A}$ מתקיים

$$\sum_{\pi \in \mathcal{A}} \frac{1}{|\pi|!} \leq 1.$$

פתרונות

פתרון שאלה 1

נסמן את שני הישרים המקבילים ב- ℓ_1, ℓ_2 . נסמן ב- n_1 את מספר הנקודות שעל ℓ_1 , וב- n_2 את מספר הנקודות שעל ℓ_2 , כך ש- $n_1 + n_2 = n$.

אם אחת מן הקבוצות ריקה, אז כל n הנקודות נמצאות על ישר אחד. במקרה כזה, לאחר שמסדרים את הנקודות לפי הסדר על הישר, כל זוג נקודות במרחק 1 הוא זוג של נקודות עוקבות, ולכן יש לכל היותר $n - 1$ זוגות כאלה. מאחר ש- $n \geq 2$, מתקיים

$$n - 1 \leq 2n - 3,$$

וסיימנו.

לכן מעתה נניח כי $n_1, n_2 \geq 1$.

ראשית נספור זוגות נקודות במרחק 1 שנמצאים על אותו ישר. על ישר אחד, אם מסדרים את הנקודות לפי הסדר, לכל נקודה יכולה להיות לכל היותר נקודה אחת אחריה במרחק 1. לכן על ℓ_i יש לכל היותר $n_i - 1$ זוגות כאלה. בסך הכול, בתוך שני הישרים יש לכל היותר

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) = n - 2$$

זוגות.

נותר לספור זוגות במרחק 1 שאחד מקצותיהם על ℓ_1 והשני על ℓ_2 . נסובב ונזיז את המישור כך ששני הישרים יהיו אופקיים. אם המרחק בין הישרים גדול מ-1, אין זוגות כאלה. אחרת, עבור כל נקודה על אחד הישרים, הנקודות שעל הישר השני הנמצאות ממנה במרחק 1 נמצאות במרחק אופקי קבוע ימינה או שמאלה.

לכן הגרף שמחבר בין נקודות משני הישרים במרחק 1 הוא איחוד של מסלולים, ובפרט אין בו מעגלים. לכן יש בו לכל היותר

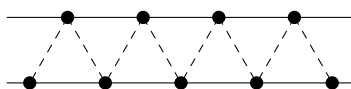
$$n - 1$$

קשתות.

בסך הכול מספר זוגות הנקודות במרחק 1 הוא לכל היותר

$$(n - 2) + (n - 1) = 2n - 3.$$

הנה הקונפיגורציה עבורה יש שיויון במקרה $n = 9$, הקונפיגורציה הכללית דומה:



פתרון שאלה 2

נניח בשלילה שיש קבוצה $\mathcal{A}$ של מחרוזות בינאריות באורך n , כך שאין בה שלוש מחרוזות שונות שהמרחק בין כל שתיים מהן שווה, וב- $\mathcal{A}$ יש יותר מ- $\frac{2^{n+1}}{n}$ מחרוזות.

לכל מחרוזת x , נסמן ב- $N(x)$ את קבוצת כל המחרוזות המתקבלות מ- x על ידי שינוי סימן אחד בלבד. כלומר, $N(x)$ היא קבוצת כל המחרוזות במרחק 1 מ- x . יש בה בדיוק n מחרוזות.

אם ניקח שלוש מחרוזות שונות מתוך $N(x)$, אז כל שתיים מהן נמצאות במרחק 2: כל אחת מתקבלת מ- x על ידי שינוי מקום אחד, ושתי מחרוזות שונות שינוי מקומות שונים. לכן, לפי ההנחה, לכל x מתקיים

$$|\mathcal{A} \cap N(x)| \leq 2.$$

נספור זוגות (x, y) כך ש- $y \in \mathcal{A}$ וגם $y \in N(x)$. מצד אחד, עבור כל x יש לכל היותר 2 אפשרויות ל- y , ולכן מספר הזוגות הוא לכל היותר $2 \cdot 2^n$.

מצד שני, אם נקבע $y \in \mathcal{A}$, אז y שייכת בדיוק ל- n קבוצות מן הצורה $N(x)$, כי אפשר לקבל את x מ- y על ידי שינוי אחד מתוך n המקומות. לכן מספר הזוגות הוא בדיוק

$$n|\mathcal{A}|.$$

מכאן

$$n|\mathcal{A}| \leq 2 \cdot 2^n,$$

ולכן

$$|\mathcal{A}| \leq \frac{2^{n+1}}{n}.$$

לכן אם בקבוצה יש יותר מ- $\frac{2^{n+1}}{n}$ מחרוזות, בהכרח קיימות בה שלוש מחרוזות שונות שהמרחק בין כל שתיים מהן שווה.

פתרון שאלה 3

נגדיר גרף מכוון שקודקודיו הם התושבים. נצייר חץ מתושב u לתושב v אם u אוהב את v . לפי ניסוח השאלה, לכל קודקוד יש גם חץ לעצמו.

עבור תושב v , נסמן ב- $N^+(v)$ את קבוצת כל התושבים ש- v אוהב. זוהי הסביבה היוצאת הסגורה של v , והיא כוללת גם את v עצמו. נוכיח שקיים תושב v כך ש-

$$|N^+(v)| \geq \frac{n}{2k}.$$

נניח בשלילה שלכל תושב v מתקיים

$$|N^+(v)| < \frac{n}{2k}.$$

נבנה קבוצה של k תושבים שאין ביניהם אף יחס אהבה, בסתירה לנתון.

בכל שלב נסתכל על הגרף המכוון שנשאר. בגרף מכוון סופי תמיד קיים קודקוד שדרגת הכניסה שלו קטנה או שווה לדרגת היציאה שלו: אחרת, אם לכל קודקוד דרגת הכניסה היתה גדולה מדרגת היציאה, סכום דרגות הכניסה היה גדול מסכום דרגות היציאה, וזה בלתי אפשרי, כי שני הסכומים שווים למספר החצים.

נבחר קודקוד כזה v . אז מספר הקודקודים שנכנסים אל v אינו גדול ממספר הקודקודים שאלהם יוצא חץ מ- v . לכן גם הסביבה הנכנסת הסגורה של v אינה גדולה מן הסביבה היוצאת הסגורה שלו. לפי הנחת השלילה,

$$|N^+(v)| < \frac{n}{2k}.$$

ולכן איחוד הסביבה היוצאת והסביבה הנכנסת של v מכיל פחות מ-

$$\frac{n}{k}$$

קודקודים.

נבחר את v , ואז נמחק מן הגרף את כל הקודקודים ש- v אוהב ואת כל הקודקודים שאוהבים את v . נחזור על הפעולה הזאת k פעמים. בכל פעם אנחנו מוחקים פחות מ- $\frac{n}{k}$ קודקודים. לכן אחרי פחות מ- k שלבים עדיין נשאר לפחות קודקוד אחד שאפשר לבחור, ואפשר לבצע את התהליך k פעמים. נקבל k תושבים נבחרים. בגלל שבכל פעם שמחקנו גם את מי שאוהב את התושב שנבחר וגם את מי שהוא אוהב, אין בין שני תושבים נבחרים שום חץ באף כיוון. כלומר, אין ביניהם שני תושבים כך שאחד אוהב את השני.

זו סתירה לנתון שבכל קבוצה של k תושבים יש שני תושבים שונים כך שאחד מהם אוהב את השני. לכן הנחת השלילה שגויה, וקיים תושב v שאוהב לפחות

$$\frac{n}{2k}$$

תושבים.

פתרון שאלה 4

נבנה דירוג שנציע לדניאל כך שכל תשובה אפשרית שלו תפסול לפחות חלק של

$$\frac{1}{2n}$$

מן האפשרויות שנותרו.

נאמר שזוג חפצים i, j הוא כמעט מוסכם אם לפחות חלק של

$$1 - \frac{1}{2n}$$

מן הדירוגים האפשריים מסכימים על הסדר ביניהם. למשל, אם לפחות חלק כזה מן הדירוגים האפשריים מדרגים את i מעל j , נאמר שהזוג כמעט מוסכם בכיוון i מעל j . נראה שאפשר למצוא דירוג ρ שמסכים עם כל הזוגות הכמעט מוסכמים. לשם כך מספיק להראות שאין מעגל של כיוונים כמעט מוסכמים. אכן, נניח בשלילה שיש מעגל

$$i_1 \text{ מעל } i_2, \quad i_2 \text{ מעל } i_3, \quad \dots, \quad i_r \text{ מעל } i_1,$$

וכל אחד מן הכיוונים במעגל הוא כמעט מוסכם.

עבור כל אחד מן הכיוונים האלה, חלק קטן מ-

$$\frac{1}{2n}$$

מן הדירוגים האפשריים אינו מסכים איתו. לכן, לפי חסם האיחוד, החלק של הדירוגים שאינם מסכימים עם לפחות אחד מן הכיוונים במעגל קטן מ-

$$\frac{r}{2n} \leq \frac{1}{2}.$$

בפרט, קיים דירוג אפשרי שמסכים עם כל הכיוונים במעגל. אבל זה בלתי אפשרי, כי דירוג לינארי אינו יכול לקיים מעגל

$$i_1 \text{ מעל } i_2 \text{ מעל } \dots \text{ מעל } i_r \text{ מעל } i_1.$$

זו סתירה.

לכן אין מעגל של כיוונים כמעט מוסכמים, ואפשר להשלים אותם לדירוג לינארי ρ . כלומר, ρ מסכים עם כל זוג כמעט מוסכמים.

נציע לדניאל את ρ . אם זה הדירוג הנכון, סיימנו. אחרת דניאל מצביע על זוג שבו טעינו. נניח שבדירוג שהצענו i מעל j , אבל אצל דניאל j מעל i .

מאחר ש- ρ מסכים עם כל הזוגות הכמעט מוסכמים, הכיוון ההפוך j מעל i אינו יכול להיות כמעט מוסכמים. לכן פחות מ-

$$1 - \frac{1}{2n}$$

מן הדירוגים האפשריים מדרגים את j מעל i . כלומר, לפחות

$$\frac{1}{2n}$$

מן הדירוגים האפשריים מדרגים את i מעל j . כל הדירוגים האלה נפסלים בעקבות התשובה של דניאל.

פתרון שאלה 5

נסמן את המספרים הנתונים ב-

$$x_1, \dots, x_{2n+1}.$$

אם לכל קבוצה $A \subseteq \{1, 2, \dots, 2n+1\}$ לא ריקה מתקיים שהסכום $\sum_{i \in A} x_i$ הוא אי-רציונלי הטענה נכונה וסיימנו.

אחרת, נבחין שאם מחליפים את x_i ב- Dx_i לכל i , כאשר D מספר טבעי, לא משנים את נכונות הטענה. נבחר מספר D באופן הבא: D הוא המכנה המשותף של הסכומים $\sum_{i \in A} x_i$ כל עוד הם רציונליים. כאן עוברים על כל הקבוצות הלא ריקות $A \subseteq \{1, \dots, 2n+1\}$ עבורן הסכום רציונלי. נשתמש בעובדה הבאה, אותה נוכיח בהמשך:

עובדה: לכל m מספרים ממשיים $y_1, \dots, y_m$ ולכל $N \geq 1$, קיים מספר טבעי q כך שכל אחד מן המספרים qy_i נמצא במרחק קטן מ- $1/N$ ממספר שלם.

נפעיל את העובדה על המספרים

$$Dx_1, \dots, Dx_{2n+1}$$

עם $N = 2n+1$. לכן קיימים מספר טבעי q , מספרים שלמים a_i , ומספרים ממשיים δ_i כך ש-

$$qDx_i = a_i + \delta_i, \quad |\delta_i| < \frac{1}{2n+1}$$

לכל i . כמו כן, כל δ_i שונה מאפס: אילו $\delta_i = 0$, אז $qDx_i = a_i$ היה שלם, ומכאן x_i היה רציונלי, בסתירה להנחה.

מבין $2n+1$ המספרים $\delta_1, \dots, \delta_{2n+1}$, לפחות $n+1$ הם בעלי אותו סימן. נבחר את $n+1$ המספרים המתאימים להם. נניח בשלילה ש-

$$\sum_{i \in A} x_i$$

רציונלי עבור A לא ריקה שמוכלת באוסף $n + 1$ המספרים שבחרנו. לפי בחירת D ,

$$qD \sum_{i \in A} x_i$$

שלם. מצד שני,

$$qD \sum_{i \in A} x_i = \sum_{i \in A} a_i + \sum_{i \in A} \delta_i.$$

מאחר ש- $\sum_{i \in A} a_i$ שלם נובע שגם $\sum_{i \in A} \delta_i$ שלם. מכיוון ש-

$$\left| \sum_{i \in A} \delta_i \right| < \frac{|A|}{2n+1} \leq \frac{n+1}{2n+1} < 1$$

נקבל שבהכרח $\sum_{i \in A} \delta_i = 0$, בסתירה לכל שכל ה- δ_i הם בעלי אותו סימן ולכן הסכום לא מתאפס. מכאן שכל סכום של תת-קבוצה לא-ריקה של $n + 1$ המספרים שנבחרו הוא אי-רציונלי.

נסיים בהוכחת העובדה: נחלק את הקוביה $[0, 1]^m$ מנפח 1 ל- $(N + 1)^m$ קוביות זהות המקבילות לצירים. נתבונן ב- $(N + 1)^m + 1$ הנקודות

$$(\{ry_1\}, \dots, \{ry_m\}), \quad 0 \leq r \leq (N + 1)^m,$$

כאשר $\{t\}$ הוא החלק השברי של t . לפי עקרון שובך היונים, שתיים מתוך הנקודות חייבות להימצא באותה קובייה קטנה. חיסור שתי הנקודות נותן מספר טבעי q שעבורו כל qy_j נמצא במרחק קטן מ- $1/(N + 1)$ ממספר שלם.

פתרון שאלה 6

נציג אסטרטגיה שמצליחה ביותר ממחצית הרשימות. יש סך הכל $2^{10} = 1024 = (2^5)^2$ רשימות. נמספר את המקומות ברשימות של אליס ושל בוב ב-1, 2, 3, 4, 5. האסטרטגיה היא כזו: כל אחד מן השחקנים מסתכל על חמשת הביטים שהוא רואה. אליס בוחרת את הביט הכי מוקדם שיש בו 1. אם אין כזה, היא בוחרת את הביט הראשון. לעומתה, בוב בוחר את הביט הכי מאוחר שיש בו 1. אם אין כזה, הוא בוחר את הביט הראשון. נתמקד רק ברשימות בהן גם אליס וגם בוב רואים לפחות ביט אחד שאינו אפס. יש סך הכל $961 = 31^2 = (2^5 - 1)^2$ רשימות כאלה. נסתכל על שלושה תתי-מקרים:

1. אם $i = j$ אז זו אסטרטגיה מנצחת כי הביטים המתאימים הם 1 ו-1.

2. אם $i > j$ אז בהכרח הביטים שנבחרו הם 0 ו-0 וזו אסטרטגיה מנצחת.

3. אם $i < j$ אז אין תלות בין הביטים שנבחרו.

אליס בוחרת ב- i כל עוד יש $i - 1$ אפסים, ואז 1, כלומר יש 2^{5-i} מצבים בהם היא תבחר ב- i . בדומה, לבוב יש 2^{j-1} מקרים בהם יבחר j : בכל המקרים בהם כל הביטים אחרי ה- j הם 0, ב- j יש 1, וכל השאר לא משנה. לכן אפשר לחשב כמה פעמים קורים שני המקרים הראשונים, עבורם ההצלחה מובטחת:

$$\sum_{1 \leq j \leq i \leq 5} 2^{5-i} 2^{j-1} = \sum_{i=1}^5 2^{5-i} (2^i - 1) = 160 - 31 = 129.$$

בנוסף, מתוך המקרים בהם $i < j$ וגם אליס וגם בוב רואים לפחות ביט אחד שאינו אפס, במחצית המקרים האסטרטגיה מצליחה, שזה קורה

$$\frac{961 - 129}{2}$$

פעמים. לכן סך הכל יש לפחות

$$129 + \frac{961 - 129}{2} = \frac{961 + 129}{2} = \frac{1090}{2} > \frac{1024}{2}$$

רשימות עבורן האסטרטגיה מצליחה.

הערה: אם בוב עושה בדיוק מה שאליס עושה, מקבלים אסטרטגיה טובה אף יותר.

פתרון שאלה 7

יהי N מספר גדול לפחות כמו האורך של כל התמורות באוסף $\mathcal{A}$. נבחר באקראי תמורה σ של המספרים

$$1, 2, \dots, N.$$

לכל k , נסתכל על k האיברים הראשונים של σ , ונשנה את שמותיהם לפי הגודל: הקטן ביותר יקרא 1, הבא אחריו יקרא 2, וכן הלאה. כך מתקבלת תמורה של $1, \dots, k$. נסמן אותה ב- σ_k . עבור כל k , התמורה σ_k מתפלגת באופן אחיד על כל $k!$ התמורות האפשריות של $1, \dots, k$. לכן, עבור תמורה קבועה π באורך k ,

$$\Pr[\sigma_k = \pi] = \frac{1}{k!}.$$

כעת נשים לב שאם $\pi, \tau \in \mathcal{A}$ הן שתי תמורות שונות, לא ייתכן ששני האירועים

$$\sigma_{|\pi|} = \pi \quad \text{ו-} \quad \sigma_{|\tau|} = \tau$$

יתרחשו יחד.

אכן, נניח למשל ש- $|\pi| < |\tau|$. אם

$$\sigma_{|\pi|} = \pi$$

וגם

$$\sigma_{|\tau|} = \tau,$$

אז π מתקבלת מן $|\pi|$ האיברים הראשונים של τ , אחרי שינוי שמות לפי הגודל. כלומר, π היא תחילית של τ , בסתירה לכך שהאוסף $\mathcal{A}$ חסר תחיליות.

לכן האירועים

$$\sigma_{|\pi|} = \pi, \quad \pi \in \mathcal{A},$$

הם אירועים זרים. סכום ההסתברויות שלהם לכל היותר 1. מכאן

$$\sum_{\pi \in \mathcal{A}} \Pr[\sigma_{|\pi|} = \pi] \leq 1.$$

אבל

$$\Pr[\sigma_{|\pi|} = \pi] = \frac{1}{|\pi|!},$$

ולכן

$$\sum_{\pi \in \mathcal{A}} \frac{1}{|\pi|!} \leq 1.$$