

תחרות גרוסמן

שאלון לתחרות העממית

4 בספטמבר 2026

כללי התחרות:

1. בשאלון יש 6 שאלות. נמקו בפירוט את תשובותיכם וכיתבו באופן ברור, קריא ומסודר.
2. יש לכתוב את הפתרונות אך ורק במקום המיועד לכך על טופס הבחינה. אין להגיש מחברות טיוטה. כיתבו בעט ובעברית.
3. אין להשתמש במחשבוניס, ספרים, דפי נוסחאות, או בכל חומר עזר אחר.
4. מלאו את פרטיכם האישיים בתחתית עמוד זה.

בהצלחה!

שם מלא: _____

מספר תעודת זהות: _____

מספר טלפון נייד: _____

כתובת דואר אלקטרוני (באותיות דפוס ברורות!): _____

שאלה 1

הראו שלכל $n \geq 1$ קיימים שלמים חיוביים a, b, c כך ש- $a^2 + b^2 = c^n$.
למשל, עבור $n = 10$:

$$237^2 + 3116^2 = 5^{10}$$

שאלה 2

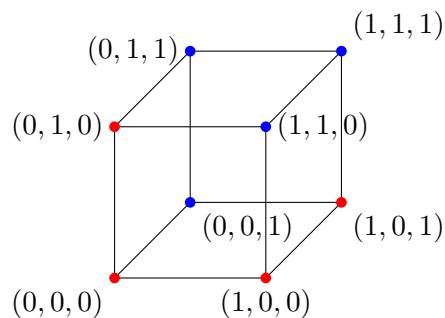
הקודקודים של הקוביה ה- n -ממדית, הם 2^n הסדרות באורך n , שכל האיברים שלהן הם 0 או 1. למשל, הקודקודים של הקוביה ה-3-מימדית הם 8 השלוש הבאות:

$(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 0, 0)$

המרחק בין שני קודקודים מוגדר כמספר הקואורדינטות שבהן הם שונים זה מזה.

למשל המרחק בין $(1, 1, 0)$ ובין $(0, 1, 1)$ הוא 2 (כי הם שונים בקואורדינטה הראשונה ובקואורדינטה השלישית).

צובעים את הקודקודים באדום וכחול בצורה מאוזנת: חצי מהקודקודים אדומים, וחצי מהם כחולים. נסמן ב- R את המרחק הממוצע בין שני קודקודים אדומים שונים, וב- B את המרחק הממוצע בין שני קודקודים כחולים שונים. למשל, עבור $n = 3$:



ואז מתקיים

$$R = \frac{d(000, 010) + d(000, 100) + d(000, 101) + d(010, 100) + d(010, 101) + d(100, 101)}{6} = \frac{1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 1}{6} = \frac{5}{3}$$

$$B = \frac{d(001, 011) + d(001, 110) + d(001, 111) + d(011, 110) + d(011, 111) + d(110, 111)}{6} = \frac{1 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1}{6} = \frac{5}{3}$$

הראו שתמיד מתקיים $R = B$.

שאלה 3

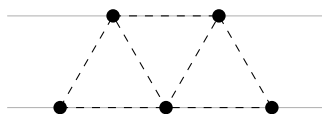
על לוח שחמט רגיל בן 64 משבצות מונחים מטבעות – מטבע אחד על כל משבצת. השופט רשאי לקבוע את מצב כל מטבע כרצונו: עץ או פלי. יש שני שחקנים שיכולים לתאם ביניהם אסטרטגיה מראש.

מהלך המשחק הוא כך:

1. השופט מסדר את כל המטבעות כרצונו (עץ או פלי על כל משבצת).
 2. השחקן הראשון נכנס לחדר.
 3. השופט מצביע על משבצת אחת בלוח – "המשבצת המיוחדת".
 4. השחקן הראשון רשאי להפוך מטבע אחת בלבד (לבחירתו), ואז הוא יוצא מהחדר.
 5. השחקן השני נכנס, רואה את הלוח במצבו החדש, ועליו לנחש מהי המשבצת המיוחדת.
- מצאו אסטרטגיה שמבטיחה שהשחקן השני יוכל תמיד לזהות בוודאות את המשבצת שעליה הצביע השופט – בלי שראה אותה בעצמו, ורק על סמך מצב המטבעות.

שאלה 4

תהי S קבוצה של $n \geq 2$ נקודות במישור, המוכלת באיחוד של שני ישרים מקבילים. הראו שמספר זוגות הנקודות ב- S שהמרחק ביניהן הוא 1 הוא לכל היותר $2n - 3$.



שאלה 5

נתונה סדרה אינסופית מחזורית של מספרים ממשיים, שסכום האיברים במחזור אחד שלה הוא אי-רציונלי. הראו שקיים מקום בסדרה כך שאם מתחילים ממנו, אז כל הסכומים החלקיים המתקבלים הם אי-רציונליים.

לדוגמה:

$$\dots, 0, 1, \pi, 0, 1, \pi, 0, 1, \pi, 0, 1, \pi, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \pi, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \pi, \dots$$

הסכומים החלקיים החל מהמקום המודגש:

$$\pi, \pi, \pi + 1, 2\pi + 1, 2\pi + 1, 2\pi + 2, 3\pi + 2, \dots$$

שאלה 6

הראו שאם נתונה קבוצה S המכילה $2n + 1$ מספרים אי-רציונליים, אז קיימת תת-קבוצה $T \subset S$ המכילה $n + 1$ איברים, כך שסכום האיברים של כל תת-קבוצה לא ריקה של T הוא אי-רציונלי.
לדוגמה:

$$e, e^2, 1 - e$$

סכומי האיברים בתת-הקבוצות הלא ריקות של הקבוצה המודגשת הם:

$$e, e^2, e + e^2$$

פתרונות

פתרון שאלה 1

נשתמש בשלשה הפיתגורית

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

עבור $n \geq 1$, נגדיר

$$a = 3 \cdot 5^{n-1}, \quad b = 4 \cdot 5^{n-1}, \quad c = 25.$$

אז

$$a^2 + b^2 = (3 \cdot 5^{n-1})^2 + (4 \cdot 5^{n-1})^2 = (3^2 + 4^2) \cdot 5^{2n-2}.$$

ולכן

$$a^2 + b^2 = 25 \cdot 5^{2n-2} = 5^{2n} = (5^2)^n = 25^n = c^n.$$

כלומר מצאנו שלמים חיוביים a, b, c כך ש- $a^2 + b^2 = c^n$, כנדרש.

פתרון שאלה 2

נניח שהקובייה היא $\{0, 1\}^n$, והמרחק בין שני קודקודים הוא מספר הקואורדינטות שבהן הם שונים. נסמן את מספר הקודקודים האדומים ב- m . מכיוון שהצביעה מאוזנת,

$$m = 2^{n-1},$$

וגם מספר הקודקודים הכחולים הוא m .

נחשב את סכום המרחקים בין כל זוגות הקודקודים האדומים, ונשווה אותו לסכום המרחקים בין כל זוגות הקודקודים הכחולים. נעשה זאת קואורדינטה-קואורדינטה.

נקבע קואורדינטה i . נניח שבין הקודקודים האדומים יש r קודקודים שבהם הקואורדינטה ה- i היא 0, ולכן יש $m - r$ קודקודים אדומים שבהם הקואורדינטה ה- i היא 1. לכן מספר זוגות הקודקודים האדומים שנבדלים בקואורדינטה i הוא

$$r(m - r).$$

כעת נסתכל על הקודקודים הכחולים. בסך הכול בקובייה יש בדיוק m קודקודים שבהם הקואורדינטה ה- i היא 0, ובדיוק m קודקודים שבהם הקואורדינטה ה- i היא 1. לכן בין הקודקודים הכחולים יש $m - r$ קודקודים עם קואורדינטה 0, ו- r קודקודים עם קואורדינטה 1. לכן מספר זוגות הקודקודים הכחולים שנבדלים בקואורדינטה i הוא

$$(m - r)r = r(m - r).$$

כלומר, עבור כל קואורדינטה בנפרד, התרומה לסכום המרחקים בין זוגות אדומים שווה לתרומה לסכום המרחקים בין זוגות כחולים.

מכיוון שהמרחק בין שני קודקודים הוא סכום התרומות מכל הקואורדינטות, נקבל שסכום כל המרחקים בין זוגות אדומים שווה לסכום כל המרחקים בין זוגות כחולים.

לבסוף, מספר הזוגות האדומים שווה למספר הזוגות הכחולים, כי בשתי הקבוצות יש m קודקודים. לכן גם הממוצעים שווים:

$$R = B.$$

פתרון שאלה 3

נמספר את 64 המשבצות במספרים

$$0, 1, 2, \dots, 63.$$

נחשוב על כל מספר כזה כמספר בינארי בן 6 ספרות.

נבחר מוסכמה: מטבע שמראה עץ נסמן ב-1, ומטבע שמראה פלי נסמן ב-0.

כעת נגדיר את הקוד של הלוח כך: לוקחים את כל המשבצות שעליהן יש מטבע עם ערך 1, ומחשבים את ה-XOR של מספרי המשבצות האלה.

כלומר, אם המטבעות עם ערך 1 נמצאים במשבצות שמספריהן

$$i_1, i_2, \dots, i_k,$$

אז קוד הלוח הוא

$$X = i_1 \oplus i_2 \oplus \dots \oplus i_k,$$

כאשר $\oplus$ מסמן XOR ביטי.

הקוד X הוא מספר בין 0 ל-63, ולכן הוא מצביע על אחת המשבצות.

נניח שהשופט הצביע על המשבצת שמספרה s . השחקן הראשון מחשב את הקוד הנוכחי של הלוח, נניח X , והופך את המטבע במשבצת שמספרה

$$f = X \oplus s.$$

נראה מה קורה לקוד לאחר ההפיכה. כאשר הופכים מטבע במשבצת שמספרה f , אז אם f השתף קודם ב-XOR, הוא מפסיק להשתף; ואם לא השתף קודם, הוא מתחיל להשתף. בשני המקרים הקוד החדש הוא

$$X \oplus f.$$

לכן אחרי ההפיכה הקוד החדש הוא

$$X \oplus f = X \oplus (X \oplus s) = s.$$

כעת השחקן השני נכנס, מחשב את קוד הלוח החדש, ומקבל בדיוק את מספר המשבצת המיוחדת. לכן האסטרטגיה מצליחה תמיד.

פתרון שאלה 4

נניח תחילה שיש נקודות על שני הישרים. נסמן את מספר הנקודות על הישר הראשון ב- p , ואת מספר הנקודות על הישר השני ב- q , כך ש-

$$p + q = n.$$

נחלק את הזוגות שמרחקם 1 לשני סוגים: זוגות שנמצאים על אותו ישר, וזוגות שנמצאים על שני ישרים שונים.

ראשית, נסתכל על זוגות שנמצאים על אותו ישר. אם יש p נקודות על ישר אחד, אז מספר הזוגות ביניהן שמרחקם 1 הוא לכל היותר $p - 1$. אכן, אם נסדר את הנקודות לפי הסדר שלהן על הישר, אז כל נקודה יכולה להיות מחוברת במרחק 1 רק לנקודה אחת מימין ולנקודה אחת משמאל, והגרף שמתקבל הוא איחוד של מסילות. לכן יש בו לכל היותר $p - 1$ קשתות.

באופן דומה, על הישר השני יש לכל היותר $q - 1$ זוגות במרחק 1. לכן מספר הזוגות במרחק 1 שנמצאים על אותו ישר הוא לכל היותר

$$(p - 1) + (q - 1) = n - 2.$$

כעת נספור זוגות במרחק 1 שבהם נקודה אחת על הישר הראשון ונקודה אחת על הישר השני. אם המרחק בין שני הישרים גדול מ-1, אין זוגות כאלה. אחרת, נבחר קואורדינטות כך ששני הישרים יהיו אופקיים, והמרחק ביניהם יהיה h , כאשר $0 < h \leq 1$.

אם נקודה על הישר העליון ונקודה על הישר התחתון נמצאות במרחק 1, אז ההפרש האופקי ביניהן חייב להיות

$$\sqrt{1 - h^2}$$

או

$$-\sqrt{1 - h^2}.$$

כלומר, מכל נקודה אפשר להגיע לנקודות על הישר השני רק בשני כיוונים אפשריים: ימינה או שמאלה במרחק אופקי קבוע.

נחבר בקשת כל שתי נקודות הנמצאות על שני ישרים שונים ומרחקן 1. הגרף הדו-צדדי שמתקבל הוא איחוד של מסילות, ולכן אין בו מעגלים. מכאן שמספר הקשתות בו לכל היותר מספר הקודקודים פחות 1, כלומר לכל היותר

$$n - 1.$$

לכן מספר הזוגות במרחק 1 שבהם הנקודות נמצאות על שני ישרים שונים הוא לכל היותר $n - 1$. בסך הכול נקבל שמספר כל הזוגות במרחק 1 הוא לכל היותר

$$(n - 2) + (n - 1) = 2n - 3.$$

אם כל הנקודות נמצאות על ישר אחד בלבד, אז מספר הזוגות במרחק 1 הוא לכל היותר $n - 1$, ובפרט לכל היותר $2n - 3$. לכן בכל מקרה החסם המבוקש מתקיים.

פתרון שאלה 5

נניח שהמחזור הוא

$$x_1, x_2, \dots, x_m,$$

וסכמו הוא

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_m.$$

לפי הנתון, S אי-רציונלי.

נגדיר סכומים מצטברים:

$$P_0 = 0, \quad P_j = x_1 + \dots + x_j$$

עבור $1 \leq j \leq m$. נמשיך את ההגדרה באופן מחזורי על ידי

$$P_{j+m} = P_j + S.$$

סכום חלקי שמתחיל מיד אחרי המקום a ומסתיים במקום b הוא

$$P_b - P_a.$$

נוכיח בשלילה. נניח שמכל מקום התחלה יש סכום חלקי לא ריק שהוא רציונלי. כלומר, לכל a קיים $b > a$ כך ש-

$$P_b - P_a$$

רציונלי.

נתחיל במקום כלשהו a_0 . לפי ההנחה, קיים $a_1 > a_0$ כך ש- $P_{a_1} - P_{a_0}$ רציונלי. שוב לפי ההנחה, קיים $a_2 > a_1$ כך ש- $P_{a_2} - P_{a_1}$ רציונלי, וכן הלאה. כך נקבל סדרה אינסופית

$$a_0 < a_1 < a_2 < \dots$$

שעבורה כל ההפרשים

$$P_{a_{j+1}} - P_{a_j}$$

רציונליים. לכן גם כל ההפרשים

$$P_{a_j} - P_{a_0}$$

רציונליים.

כעת יש רק m שאריות אפשריות מודולו m , ולכן קיימים $r < s$ כך ש-

$$a_s \equiv a_r \pmod{m}.$$

לכן

$$a_s = a_r + tm$$

עבור שלם חיובי t . לפי ההגדרה המחזורית של P_j ,

$$P_{a_s} = P_{a_r} + tS.$$

ולכן

$$P_{a_s} - P_{a_r} = tS.$$

אבל מצד אחד, $P_{a_s} - P_{a_r}$ רציונלי, כפי שראינו. מצד שני, S אי-רציונלי ו- t שלם חיובי, ולכן tS אי-רציונלי. זו סתירה.

לכן ההנחה שגויה. מכאן שקיים מקום התחלה שממנו כל הסכומים החלקיים הלא ריקים הם אי-רציונליים.

פתרון שאלה 6

נתונה קבוצה S ובה $2n + 1$ מספרים אי-רציונליים. נרצה למצוא תת-קבוצה $T \subset S$ בגודל $n + 1$, כך שסכום האיברים של כל תת-קבוצה לא ריקה של T הוא אי-רציונלי.

נסמן את איברי S על ידי

$$x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}.$$

נחשוב על המספרים האלה "עד כדי הוספת מספר רציונלי". באופן פורמלי, נסתכל על המרחב הווקטורי מעל $\mathbb{Q}$ המתקבל מן הממשיים כאשר מזהים שני מספרים שהפרשם רציונלי. במרחב זה כל מספר רציונלי מזהה עם 0, וכל מספר אי-רציונלי נותן וקטור שאינו 0.

נסמן ב- v_i את הווקטור המתאים ל- x_i . מכיוון שכל x_i אי-רציונלי, כל v_i הוא וקטור לא אפסי. הווקטורים $v_1, \dots, v_{2n+1}$ פורשים מרחב וקטורי מממד סופי מעל $\mathbb{Q}$. נבחר בסיס למרחב הזה, ונחשוב על הווקטורים v_i כווקטורים לא אפסיים ב- $\mathbb{Q}^d$, עבור d מתאים. כעת נבחר היפר-מישור שעובר דרך הראשית ואינו מכיל אף אחד מן הווקטורים

$$v_1, \dots, v_{2n+1}.$$

אפשר לעשות זאת, כי יש רק מספר סופי של וקטורים.

ההיפר-מישור מחלק את המרחב לשני צדדים. מאחר שיש $2n + 1$ וקטורים, באחד הצדדים יש לפחות $n + 1$ מהם. נבחר $n + 1$ וקטורים הנמצאים באותו צד, וניקח את המספרים המקוריים המתאימים להם. נסמן את קבוצת המספרים הזאת ב- T .

נראה ש- T מקיימת את הדרוש. מכיוון שכל הווקטורים שנבחרו נמצאים באותו צד של ההיפר-מישור דרך הראשית, קיימת פונקציה ליניארית ℓ כך שלכל וקטור v_i שנבחר מתקיים

$$\ell(v_i) > 0.$$

לכן, אם ניקח תת-קבוצה לא ריקה של T , המתאימה לווקטורים

$$v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k},$$

אז

$$\ell(v_{i_1} + \dots + v_{i_k}) = \ell(v_{i_1}) + \dots + \ell(v_{i_k}) > 0.$$

בפרט,

$$v_{i_1} + \dots + v_{i_k} \neq 0.$$

אבל אם סכום המספרים המקוריים

$$x_{i_1} + \dots + x_{i_k}$$

היה רציונלי, אז הווקטור המתאים לו היה 0, כלומר היינו מקבלים

$$v_{i_1} + \dots + v_{i_k} = 0,$$

בסתירה למה שהראינו.

לכן סכום האיברים של כל תת-קבוצה לא ריקה של T הוא אי-רציונלי. מכיוון ש- $|T| = n + 1$, סיימנו.