פתרון לשאלון תחרות גרוסמן תשס"ה (9.12.2004)

1. סכום הספרות של כל אחד מהמספרים הנ"ל הוא 45, לכן 9 הוא מחלק משותף. מצד שני, המחלק המשותף המקסימלי מחלק את $123456798 - 123456789 = 9$, לכן הוא שווה בהכרח ל-9.

2. נניח שאי השוויון נכון עבור K מסוים. נציב $y = z = 1$ ו $x = 2 + r$ עם $r > 0$ כלשהו (זה מבטיח $x^2 - 4yz = 4r + r^2 > 0$) ונקבל

$$(4r + r^2)^2 > Kr^2 \iff (4 + r)^2 > K\,.$$

מכיוון שאי השוויון צריך להתקיים לכל $r > 0$ נובע ש $K \leq 16$.

מצד שני, אי השויון מתקיים אכן עבור $K = 16$. ואמנם, אם נניח בלי הגבלת כלליות ש $x = 1$ נקבל:

$$L := (x^2 - 4yz)^2 - 16(2y^2 - xz)(2z^2 - xy) = 1 - 24yz - 48y^2z^2 + 32(y^3 + z^3) \geq 1 - 24yz - 48y^2z^2 + 64(yz)^{3/2},$$

כי $y^3 + z^3 - 2y^{3/2}z^{3/2} = (y^{3/2} - z^{3/2})^2 \geq 0$. נסמן $q = (yz)^{1/2}$ ונקבל ש:

$$L \geq 1 - 24q^2 - 48q^4 + 64q^3 = (6q + 1)(1 - 2q)^3.$$

לבסוף נשים לב ש $0 < q < 1/2$ (כי נתון ש $1 = x^2 > 4yz$), ונסיק ש $L > 0$ כנדרש.

3. לפי הנתון $np = k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$ עבור איזשהו k טבעי. מכיוון ש p ראשוני, יתכנו שני מקרים: $p|k - 1$ או $p|k + 1$.

במקרה הראשון נקבל שמתקיים $k - 1 = sp$ עם s מספר טבעי, ולכן $np = sp(sp + 2)$, ז"א $n = s(sp + 2)$. מכאן נובע ש:

$$n + 1 = s^2p + 2s + 1 = (p - 1)s^2 + (s + 1)^2$$

הוא סכום של p רבועים.

בצורה דומה, במקרה השני $k + 1 = sp$, ולכן $np = sp(sp - 2)$. נובע ש:

$$n + 1 = s^2p - 2s + 1 = (p - 1)s^2 + (s - 1)^2$$

שהוא שוב סכום של p רבועים שלמים.

4. נסמן את הבעיות ע"י A, B, C, D, E, F, G, H. אם אחת הבעיות, נניח A, ניתנה ל 4 תלמידים (לפחות), אז כ"א מהארבעה קיבל בנוסף זוג שאלות שונות. אם כך, יש לפחות 9 שאלות שונות (A ועוד 8), וזאת בסתירה לנתון. מכאן שכ"א מהשאלות ניתנה ל 3 תלמידים לכל היותר, ז"א, המספר הכולל של שאלות שהופיעו בכל השאלונים הוא לכל היותר 24. מכיוון שכל תלמיד קיבל 3 שאלות נובע שהשתתפו בתחרות 8 תלמידים לכל היותר.

מצד שני תחרות עם 8 תלמידים העונה על הדרישות תיתכן עם 8 שלישיות הבעיות הבאות:

$$ABC, ADE, AFG, BDG, BFH, CDH, CEF, EGH\,.$$

5. נסמן את הזויות $\alpha_1 = \angle CAD$ ו $\alpha_2 = \angle CAB$. מהפעלת משפט הקוסינוסים במשולשים $\triangle ADC$, $\triangle ABC$ ו $\triangle ABD$ נקבל ש

$$\cos(\alpha_1), \cos(\alpha_2), \cos(\alpha_1+\alpha_2) \in \mathbb{Q}\,.$$

לכן גם $\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 - \cos(\alpha_1+\alpha_2) \in \mathbb{Q}$, וכך גם

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{\sin\alpha_2 \sin\alpha_1}{\sin^2\alpha_1} = \frac{\sin\alpha_2 \sin\alpha_1}{1-\cos^2\alpha_1} \in \mathbb{Q}\,.$$

נובע ש

$$\frac{BP}{PD} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ADP}} = \frac{AB \cdot AP \sin\alpha_2}{AD \cdot AP \sin\alpha_1} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_1} \in \mathbb{Q}\,.$$

קבלנו ש $\frac{BP}{PD} = \frac{BD}{PD} - 1 \in \mathbb{Q}$, ונובע ש $PD \in \mathbb{Q}$ ולכן גם $BP = BD - PD \in \mathbb{Q}$. באותו אופן מראים ש $AP, PC \in \mathbb{Q}$.

6. א. נראה שלא קיימות נקודות המקיימות את התנאים. נניח בשלילה שזה יתכן, ונוכל להניח בלי הגבלת הכלליות ש: $AD < 1$. אז המשולשים $\triangle ABC, \triangle BCD$ הם משולשים שווי צלעות, שיוצרים מקבילית $ABCD$ עם זוויות של $60°$ ו $120°$. אך אז $AD = \sqrt{3} > 1$. סתירה.

ב. נבנה n נקודות באופן הבא. על היקף מעגל ברדיוס 1 שמרכזו בנקודה כלשהי A_1 נבחר זוג נקודות A_2 ו A_n שהמרחק ביניהן הוא 1 (ז"א $\angle A_2A_1A_n = 60°$). על קשת המעגל שבין A_2 ל A_n נבחר נקודות כלשהן $A_3, \ldots, A_{n-1}$. קל לראות ש n הנקודות $A_1, \ldots, A_n$ מקיימות את הדרוש.

7. נניח בלי הגבלת כלליות שאורך צלע המשבצת הוא 1. נשים לב שצביעת משבצת באדום מקטינה ב-2 את מספר הצלעות שבשפת השטח הצבוע באדום, ויכולה להוסיף לכל היותר 2 צלעות לשפה הנ"ל. מכאן שלכל אורך המשחק, היקף שפת השטח הצבוע אדום אינו גדל. מכיוון שההיקף הנ"ל הוא לכל היותר 28 בתחילת המשחק, ואילו היקף ריבוע 8×8 הוא 32, נובע שלא ניתן לצבוע את הלוח כולו באדום.