2014
המחלקה למתמטיקה
הטכניון

תחרות גרוסמן: פתרונות

1. נניח שישנם $n=2000$ קלפים ואנו מתבוננים בקלף $j=10$. ההסתברות היא

$$\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{k-j}\prod_{\ell=k}^{n-1}\frac{\ell}{n}=\frac{(n-1)!}{n^n}\sum_{k=j}^{n}\frac{k^{j-1}(k-1)^{k-j}}{(k-1)!}.$$

הסבר: הסכום הוא על מיקומו k של הקלף ה j בעת ערבובו. אם הוא הגיע למקום ה k, אז על מנת שיהיה אחרון הקלפים $1,\ldots,j-1$ חייבים להיות לפני k, הקלפים $j+1,\ldots,k$ חייבים להשאר לפני k, והקלפים $k+1,\ldots,n$ חייבים לעבור לפני k.

2. ההוכחה היא באנדוקציה על $n=|A|+|B|-|C|$.

בסיס: אם $n\le 1$ הטענה נכונה.

צעד: מכיוון ש $n\ge 2$, מהנחה על גדלי הקבוצות נסיק כי A,B אינן ריקות. נסמן

$$a_{min}=\min A\ ,\quad b_{max}=\max B.$$

נגדיר

$$A'=A\setminus\{a_{min}\}\ ,\quad B'=B\setminus\{b_{max}\}.$$

אם קיימים $a\in A,b\in B$ כך ש $a_{min}+b=a+b_{max}$ אז $b-a=b_{max}-a_{min}$ ולכן $b=b_{max},a=a_{min}$. נסיק כי כמות השלשות $(a',b',c)\in A'\times B'\times C$ כך ש $a'+b'=c$ היא קטנה לכל היותר ב $|C|$ מכמות השלשות ב $A\times B\times C$. מהנחת האינדוקציה, כמות השלשות ב $A\times B\times C$ היא לכל היותר

$$|A'||B'|-(|A'|+|B'|-|C|)^2/4+1/4+|C|=|A||B|-(|A|+|B|-|C|)^2/4+1/4$$

כנדרש.

3. התשובה היא $\sum_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|$.

ראשית נראה שזהו חסם עליון על סכום המרחקים. נסמן ב $x_{i,t}$ את מיקום הנקודה ה i בזמן $t\ge 0$, ונסמן

$$P(t)=\sum_{i<j}|x_{i,t}-x_{j,t}|.$$

נניח (בלי הגבלת הכלליות) שבזמן $t\to t+1$ הוזזו הנקודות $x_{1,t},x_{2,t}$. לכל y מתקיים

$$|x_{1,t}-y|+|x_{2,t}-y|\ge 2\left|\frac{x_{1,t}+x_{2,t}}{2}-y\right|=|x_{1,t+1}-y|+|x_{2,t+1}-y|.$$

(ישנם כמה דרכים לוודא זאת, למשל כי ערך מוחלט היא פונקציה קמורה.) אז

$$P(t) - P(t+1) \geq |x_{i,t} - x_{j,t}|.$$

מכיוון ש $|x_{i,t} - x_{j,t}|$ זה בדיוק סכום המרחקים בצעד $t \to t+1$, ומכיוון ש $P(t) \geq 0$ לכל t, נסיק כי סכום המרחקים הוא לכל היותר $P(0)$.

שנית, נשים לב שאי השיוויון מקודם הוא שיוויון לכל y שאינו בין $x_{1,t}, x_{2,t}$. מכך נסיק שהאסטרטגיה הטובה ביותר היא: כל עוד לא כל הנקודות באותו המקום, נבחר שתי נקודות שכנות עם מרחק מקסימלי ונצמיד אותן. הערך $P(t)$ ילך ויקטן לאפס, וסכום המרחקים ילך ויתקרב ל $P(0)$.

4. תהי F כך שלכל $i \neq j$ לא קיימות $A_1, A_2, A_3, A_4 \in F$ כך שארבעת הקבוצות

$$\{i,j\} \cap A_1, \{i,j\} \cap A_2, \{i,j\} \cap A_3, \{i,j\} \cap A_4$$

שונות.

לכל i נסמן

$$m_i = \max\{|\{A \in F : i \in A\}|, |\{A \in F : i \notin A\}|\}.$$

נניח (בלי הגבלת הכלליות) ש $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_n$. הטענה היא ש $m_1 \in \{0, 1, |F| - 1, |F|\}$. טענה זו תסיים הוכחה. נניח (לשם סתירה) שזה לא מתקיים, ושמתקיים

$$m_1 = |\{A \in F : i \in A\}|$$

(המקרה השני סמטרי). נסמן $F' = \{A \in F : i \in A\}$. מקסימליות m_1 אומרת שלכל $i > 1$ קיימות $A_1, A_2 \in F'$ כך ש $i \in A_1, i \notin A_2$. מצד שני קיים $i > 1$ כך שקיימות $A_1, A_2 \in F \setminus F'$ כך ש $i \in A_1, i \notin A_2$, כי ב F אין חזרות. לכן $\{1, i\}$ מהווים סתירה להנחה על F.

5. א. קבוצה של n ישרים כבשאלה מגדירה $1 + \frac{(n+1)n}{2}$ תחומים במישור. ניתן להוכיח זאת באנדוקציה. עבור $n = 2000$ זהו מספר אי זוגי.

ב. נאמר שישר L <u>מצביע</u> לתחום T אם T נמצא בחצי המישור עם יותר תחומים ביחס ל L. לכל תחום T נגדיר $f(T)$ כמספר הישרים שמצביעים עבורו. יהי T_0 התחום עם ערך מקסימלי של f. הטענה היא שזהו תחום כדרוש. אחרת, אחד הישרים שתוחם את T_0 לא מצביע לו. אם נחצה את ישר זה נגיע לתחום חדש עם ערך f גבוה יותר.

6. דני טועה. ישנן הרבה דוגמאות נגדיות. נתאר אחת עם $n = 6$. יהיו A, B, C קודקודי משולש שווה צלעות. יהיו D, E, F אמצעי הצלעות. נגדיר P כמצולע עם קודקודים A, B, C, D, E, F. (אם רוצים ניתן לעשות פרטובציה קלה.) נגדיר את Q להיות עם קודקודים A, A, B, B, C, C. לכל נקודה X ב Q סכום המרחקים מ A, B, C גדול או שווה לסכום המרחקים מ D, E, F כי למשל $E = (A+B)/2$ ולכן

$$.\|X-E\| = \|(X-A)/2+(X-B)/2\| \leq \frac{1}{2}\left(\|X-A\|+\|X-B\|\right)$$

7. נניח לשלילה שפוליגון כזה קיים. נבחר אותו להיות עם אורך צלע מינימלי. נסמן ב $\sqrt{R}$ את אורך הצלע. לכל שני קודקודים שכנים $(x,y),(x',y')$ בפוליגון מתקיים

$$.(x-x')^2+(y-y')^2 = R$$

כל המספרים שלמים ונחשבם מודולו שתיים:

$$.x+x'+y+y' = R \ mod \ 2$$

אם R אי זוגי, אז כשנסכום על כל הצלעות, בצד שמאל נקבל 0 ובצד ימין 1 כי מספר הצלעות אי זוגי וזו סתירה. לכן R זוגי, וניתן להניח כי $(x-x'),(y-y')$ הם אי זוגיים כי אחרת ניתן להקטין R על ידי חלוקת כל הנקודות פי שתיים. עתה לאורך כל צלע

$$x+x' = 1 \ mod \ 2$$

וכשנסכום על כל הצלעות שוב נקבל סתירה.