TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 HAIFA, ISRAEL

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

תחרות גרוסמן

1. יהי נתון מרובע קמור $ABCD$ במישור בעל שטח S.

א. הראו כי $|AB||CD|+|BC||DA|\geq 2S$.

ב. עבור אילו מרובעים מתקיים שיוויון בסעיף א?

2. תהיינה נתונות $A=\{a_1,\dots,a_n\}$ ו־$B=\{b_1,\dots,b_n\}$ שתי קבוצות זרות של טבעיים אשר איחודן הוא בדיוק הקבוצה $\{1,2,\dots,2n\}$. הראו כי המקסימום של הביטוי $\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_{\sigma(i)}|$ על פני כל התמורות σ של האינדקסים $1,2,\dots,n$ (כלומר על פני כל הפונקציות החד־חד־ערכיות ועל: $\sigma:\{1,2,\dots,n\}\longrightarrow\{1,2,\dots,n\}$) תמיד שווה ל־$n^2$ (לכל שתי קבוצות A ו־B כנ"ל).

3. חדר מלבני מרוצף ע"י מרצפות מלבניות בגדלים $a\times b$ ו־$c\times d$ (לא מותרים סיבובים). כאשר a,b,c,d טבעיים, $ab=cd$ והזוג (a,b) שונה מהזוג (c,d). אחת המרצפות מסוג $a\times b$ נשברה. הראו כי לא ניתן לרצף את החדר מחדש בעזרת שאר המרצפות שנותרו שלמות ומרצפת נוספת בגודל $c\times d$.

4. יהיו $x_1,\dots,x_n$ ממשיים. הראו כי: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i+x_j|\geq\sum_i|x_i|$.

5. נתונות אינסוף נורות המסודרות בשורה במצב כבוי. ליד כל נורה יש מתג אשר לחיצה עליו משנה את מצב הנורה (מכבוי לדלוק וההפך). כל אחד מ־2012 אנשים בתורו לוחץ על המתגים של 2013 נורות רצופות לפי בחירתו. נסמן ב־k את מספר הנורות הדלוקות לאחר שכל האנשים לחצו על המתגים.

א. הראו כי k זוגי.

ב. הראו כי לאחר שכל האנשים לחצו על המתגים, אין רצף באורך 2013 נורות המכיל יותר מ־$\frac{k}{2}$ נורות דלוקות.

TEL: +972-4-8223071, +972-4-8294272
FAX:+972-4-8293388

טלפון: 04-8294272, 04-8223071
פקסימיליה: 04-8293388

TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
32000 HAIFA, ISRAEL

הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
הפקולטה למתמטיקה
חיפה 32000

6. נתון מחומש קמור P במישור בעל קדקדים $V_1, \dots, V_5$. חמשת הישרים המכילים את צלעות P מחלקים את המישור למספר סופי של תחומים.

א. יהי S תחום כלשהו מן התחומים הנ"ל מחוץ ל־P. הראו כי קיים זוג אינדקסים $1 \leq i < j \leq 5$ כך שלכל נקודה A ב־S מתקיים ששני הישרים דרך A המשיקים ל־P עוברים דרך V_i ו־V_j, בהתאמה.

אנו נכנה את הכיוון של הישר דרך V_i ו־V_j בשם **הכיוון שמתאים ל־**S.

ב. לכל נקודה A מחוץ ל־P, נצא מ־A לאורך קוו ישר בכיוון המתאים לתחום שבו נמצאת A עד אשר נגיע לתחום אחר. שם נמשיך לאורך ישר בכיוון המתאים לתחום החדש עד אשר נגיע לתחום הבא וכך הלאה. הראו כי המסלול שמתקבל נסגר וחוזר חזרה לנקודה A.

7. עבור קבוצה (סופית) $S \subset \mathbb{R}^3$ נסמן ב־S_{xy} ההיטל של S על מישור ה־$x-y$. כלומר S_{xy} היא קבוצת כל הנקודות $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ כך שקיים $c \in \mathbb{R}$ ו־(a,b,c) נקודה ב־S. באופן דומה נגדיר את S_{xz} ו־S_{yz}. הראו כי אם ידוע שהגודל של כל אחת מ־S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} שווה ל־n^2 (n טבעי), אז הגודל של S הוא לכל היותר n^3.

TEL: +972-4-8223071, +972-4-8294272
FAX:+972-4-8293388

טלפון: 04-8294272, 04-8223071
פקסימיליה: 04-8293388